



TITLE:

多孔性媒質中に穿った円柱状の空洞を過ぎる粘性流(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

佐野, 理

CITATION:

佐野, 理. 多孔性媒質中に穿った円柱状の空洞を過ぎる粘性流(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 510: 89-99

ISSUE DATE:

1984-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98312>

RIGHT:

多孔性媒質中に穿った円柱状の空洞を過ぎ る粘性流

農工大教養 佐野 理 (Osamu Sano)

§ 1. 問題の背景

地下水流の調査にあたって古くから行なわれている方法の一つはトレーサー法である。^{1,2)} これは測定地点の近傍に数mの距離を隔てて投入孔と観測孔をボーリングし、投入孔から注入されたトレーサー（例えば食塩、塩化アンモニウム、色素、放射性同位元素、など）が観測孔に到達する時間を測定して流速を求める方法である。この方法は測定原理としては単純明快であるが、ボーリング孔が複数個必要なため非経済的である、地下水流は超微流速（流速の大きさ $0.1 \sim 5 \text{ m/day}$ ）なので長時間の観測が必要となる、トレーサーの拡散のために測定精度が悪い、検出可能な大量のトレーサーの注入により地下水性状の変化や環境汚染の恐れがある、など多くの問題をかかえている。これらの諸問題は、もし1個のボーリング孔内での測定に基いて流速の決定がなされれば、その大部

分が解決されるはずである。実際このような試みはいくつかなされており、1個の孔内に投入されたトレーサーの濃度の減少速度から流速を推定するポイント・ダイリュージョン法や、ボーリング孔内に直接流速計を設置する方法などが知られている。^{1~3)} しかし、この場合に新たに問題となるのは、観測用に設けたボーリング孔が元の地下水流に与える影響はどの程度であるか、という事である。これに対してはこれまでのところ理論的な裏付けが充分なされているとは言い難い。

一般に地下水流のような多孔性媒質中の流れに対してはダルシーの法則が成り立つと言われている。^{1~5)} これは媒質中の流速 V (流量を断面積で割った平均的なもの) と圧力勾配 ∇P との間の関係式で

$$V = -(K/\mu) \nabla P \quad (1)$$

と表わされる。ここで μ は流体の粘性率、 K は媒質の透水係数と呼ばれる定数 (K の値は平均直径 $0.05 \sim 0.1 \text{ mm}$ の微細砂で $4 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$, $0.1 \sim 0.25 \text{ mm}$ の細砂で $2 \times 10^{-7} \text{ cm}^2$ 程度) である。もし透水係数 K の媒質中に透水係数 k ($k \gg K$) の多孔性円柱が置かれており、無限遠で円柱に直交する一様な流れ U_∞ があつたとすると、⁶⁾ 円柱内の流れ U_0 が容易に求まり、

$$U_0 = \frac{2k}{k+K} U_\infty \quad (2)$$

となる。流れの向きは一樣流の向きと同じである。これから $k \gg K$ のときに $U_0 \approx 2U_\infty$ となることが導かれるが、透水係数無限大の多孔性円柱が多孔性媒質中に穿った円柱状空洞と同じ効果を持つと言えるのであろうか。この点を明らかにするための第1歩として、次節では簡単なモデルに基いて推論を試みる。

§2. 多孔性媒質中の空洞のモデル

一般にボーリング孔の直径 $2R_0$ は 10 cm 程度であるから、多孔性媒質である地盤はこれに比べて充分広い範囲にわたって一樣に広がっていると考えられる。また、不透水性の媒質が存在していたり、井戸による揚水中であったりするような特別な場合を除けば、平野部を流れる地下水の流速の鉛直成分は水平成分に比べて充分小さい。そこでまず地盤は無限遠まで広がった均質な多孔性媒質であると理想化し、その中で2次元定常流を考えることにする。また流体は水であり、その圧縮性は無視できると仮定する。

さて、代表的な地下水流速は前述のように $U_\infty \sim 10^{-3}$ cm/s 程度であるから、空洞内の流れのレイノルズ数 $Re \equiv \rho U_\infty R_0 / \mu$ は高々 1 程度である。そこで空洞内の流れ（流速 V ，圧力 p ）はストークス方程式および連続の式：

$$\nabla p = \mu \Delta V, \quad \nabla \cdot V = 0 \quad (3), (4)$$

に従うと考えられる。一方、空洞外部の多孔性媒質中ではダルシー方程式(1)が成り立つと考えられるが、これは空間微分の階数が(3)式と異なるために、このままでは空洞の境界条件を満たすことができない。そこで(1)を一般化したダルシー方程式^{7~13)}

$$\nabla P = \tilde{\mu} \Delta V - \frac{\mu}{K} V \quad (5)$$

を採用する。ここで V , P はそれぞれ媒質中の速度および圧力, K は透水係数, $\tilde{\mu}$ は媒質中を流れる流体の実効粘性率である。また、仮定により

$$\nabla \cdot V = 0. \quad (6)$$

境界条件は無限遠で円柱に直交する一様流 U_∞ :

$$V_x \rightarrow U_\infty, \quad V_y \rightarrow 0, \quad P \rightarrow -\frac{\mu}{K} U_\infty x, \quad (7)$$

空洞境界 $r = R_0$ で速度および圧力の連続性:

$$\begin{aligned} v_r &= V_r, \quad v_\varphi = V_\varphi, \\ p &= P, \quad \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = \tilde{\mu} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \end{aligned} \quad (8)$$

を仮定する。但し、図1に示したような座標系 (x, y) , (r, φ) を導入した。

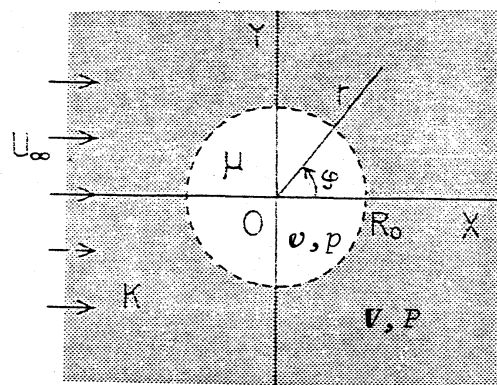


図 1

§ 3. モデル方程式の解

境界条件(7)(8)を満たす方程式系(3)~(6)の解は以下の通りである。

空洞外部の領域 ($\zeta \geq \zeta_0$) :

$$\left. \begin{aligned} V_r^* &\equiv \frac{V_r}{U_\infty} = \left[1 + \frac{B^*}{\zeta^2} + \frac{\sigma^*}{\zeta} K_1(\zeta) \right] \cos \varphi, \\ V_\varphi^* &\equiv \frac{V_\varphi}{U_\infty} = \left[-1 + \frac{B^*}{\zeta^2} - \sigma^* K_1'(\zeta) \right] \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\Psi^* \equiv \frac{\Psi}{\sqrt{K} U_\infty} = \left[\zeta + \frac{B^*}{\zeta} + \sigma^* K_1(\zeta) \right] \sin \varphi, \quad (10)$$

$$P^* \equiv \frac{P}{\check{\mu} U_\infty / \sqrt{K}} = \left(-\zeta + \frac{B^*}{\zeta} \right) \cos \varphi. \quad (11)$$

空洞内部の領域 ($\zeta \leq \zeta_0$) :

$$\left. \begin{aligned} v_r^* &\equiv \frac{v_r}{U_\infty} = \left(U_0^* + \frac{a^*}{8} \zeta^2 \right) \cos \varphi, \\ v_\varphi^* &\equiv \frac{v_\varphi}{U_\infty} = - \left(U_0^* + \frac{3a^*}{8} \zeta^2 \right) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\psi^* \equiv \frac{\psi}{\sqrt{K} U_\infty} = \left(U_0^* \zeta + \frac{a^*}{8} \zeta^3 \right) \sin \varphi, \quad (13)$$

$$p^* \equiv \frac{p}{\mu U_\infty / \sqrt{K}} = a^* \zeta \cos \varphi. \quad (14)$$

但し

$$B^* = \zeta_0^4 (\mu^* \alpha + 3\beta) / \Delta, \quad \sigma^* = -2\zeta_0^2 (3 + \mu^*) / \Delta,$$

$$U_0^* = \{ 2(1 - \mu^*) \zeta_0 K_1(\zeta_0) + \zeta_0^2 [\mu^* (3\alpha - \beta) + 6\beta] \} / \Delta,$$

$$a^* = -8\mu^* (\alpha - \beta) / \Delta,$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 8(\alpha - \beta) + \zeta_0^2(\mu^* \alpha + 3\beta), \\ \alpha &= K_0(\zeta_0) + (\zeta_0 + \frac{2}{\zeta_0})K_1(\zeta_0), \\ \beta &= K_0(\zeta_0) + \frac{2}{\zeta_0}K_1(\zeta_0), \\ \zeta &= r/\sqrt{K}, \quad \zeta_0 = R_0/\sqrt{K}, \\ \tilde{K} &= \mu^* K, \quad \mu^* = \tilde{\mu}/\mu\end{aligned}$$

(15)

である。この結果は特別な場合として既に求めている表式⁽¹⁴⁾を含んでいる。

流れの対称性を考慮して第1象限内の流線を描いたものが図2である。左下方の破線の円弧は空洞の境界を表わす。いずれも $\mu^* = 1$ の場合の流線を示したものであるが、 $\zeta_0 (= R_0/\sqrt{K})$ の値が増加するにつれて空洞近傍の流体が空洞に集中していく様子がうかがえる。とくに $\zeta_0 \gg 1$ では空洞の上

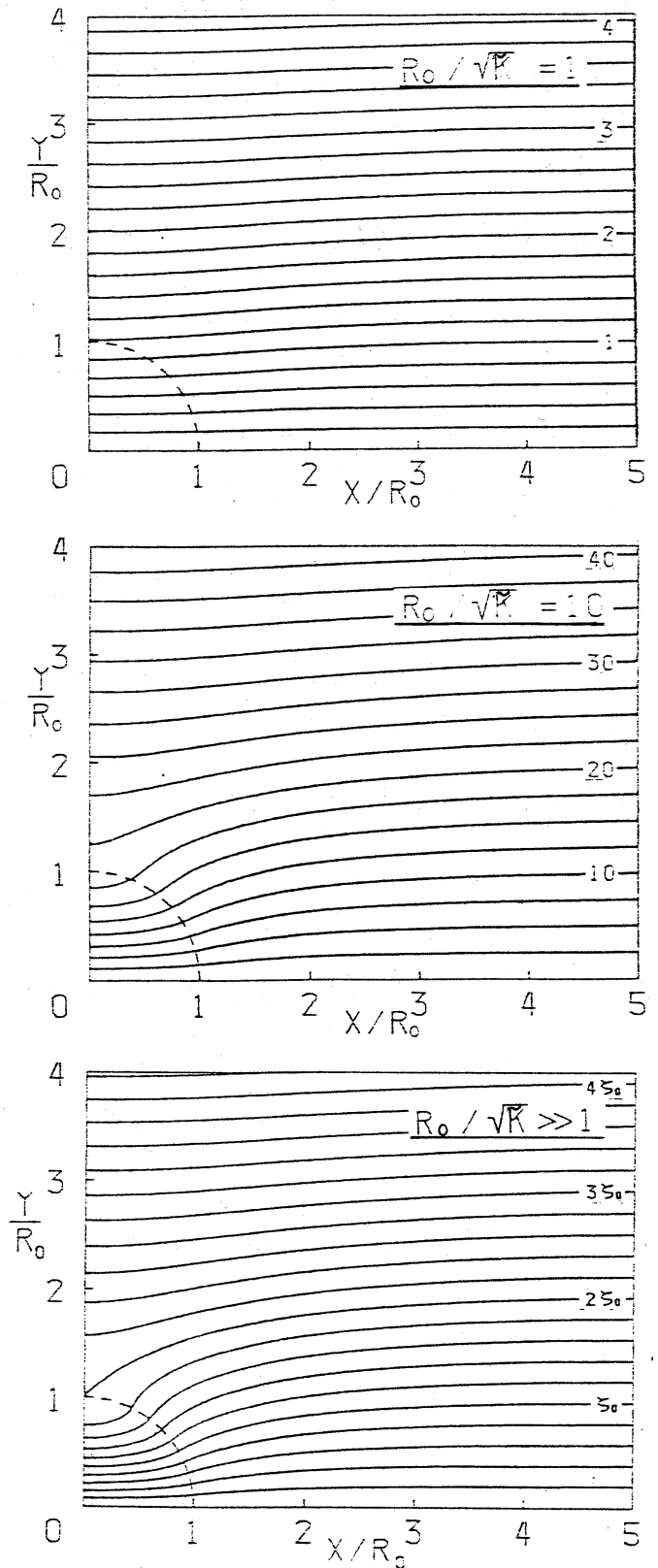
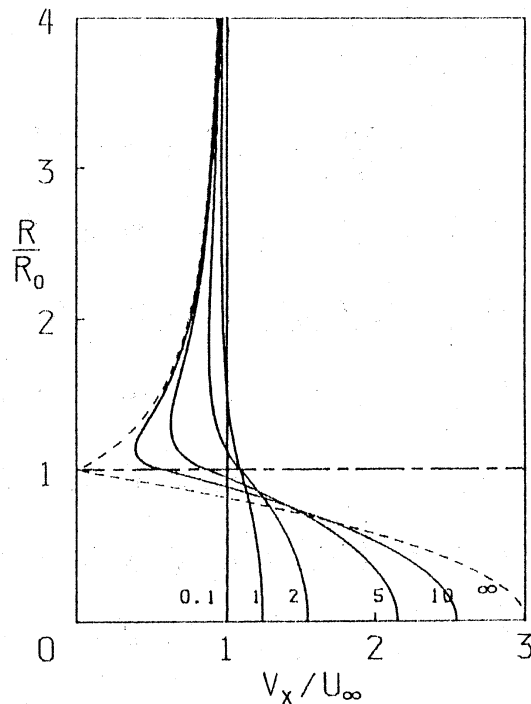


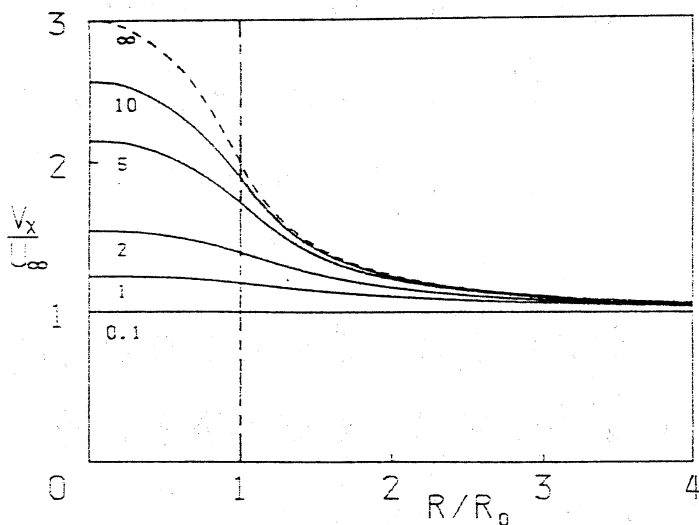
図 2

流側で直径の2倍の範囲の断面を通過する流体が空洞内を通過する。

空洞内の断面 $x=0$ および $y=0$ 上での速度分布を示したものが図3および図4である。空洞中心部で流速が増加する反面、空洞境界近傍では流速の減少している様子が見られる。とくに空洞中心における流速は $r_0 \gg 1$ で $3U_\infty$ になることがわかる。また、上流側から空洞内に流れ込む



↑
図3 $x=0$ の断面内の速度分布 ($\mu^*=1$). 図中の添字は r_0 の値を示す。



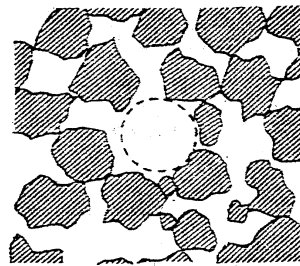
← 図4 $y=0$ の断面内の速度分布 ($\mu^*=1$). 図中の添字は r_0 の値を示す。

流量 Q は空洞がなかった場合の同じ領域に流れ込む流量 Q_∞ に比べて

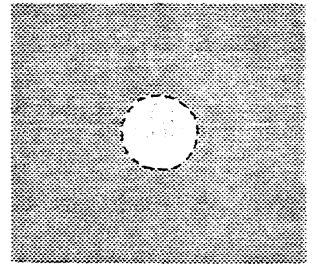
$$\frac{Q}{Q_\infty} = U_0^* + \frac{\alpha^*}{8} \zeta_0^2 \quad (16)$$

倍になっている。これは $\mu^* = 1$ の場合には図4の $R/R_0 = 1$ における V_x/U_∞ の値として示されている。とくに $\zeta_0 \rightarrow 0$ では $Q/Q_\infty \rightarrow 1$ に、 $\zeta_0 \rightarrow \infty$ では $Q/Q_\infty \rightarrow 2$ であるが、このことは図2において流線が空洞に集中する様子とも合致する。

空洞の影響の ζ_0 依存性は直感的には図5から理解できる。すなわち、 ζ_0 は空隙の大きさ (\sqrt{K} 程度) に比べて空洞の半径 R_0 がどの程度であるかを表わすパラメーターであり、観測用に穿ったボーリング孔が元から存在していた空隙と同程度であるような場合 [図5(a)] には



(a)



(b)

図5 多孔性媒質中の空隙とボーリング孔 (概念図)。
(a) $\zeta_0 \lesssim 1$, (b) $\zeta_0 \gg 1$.

しかし地下水流の調査に

あたって問題となる多くの場合に ζ_0 は非常に大きな値 (10^4 程度) をとるから、図5(b)のように空洞と媒質の境界は顕著になってくる。このように $\zeta_0 \gg 1$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} B^* &\sim \zeta_0^2 + O(1), \quad \sigma^* = O(e^{\zeta_0}/\sqrt{\zeta_0}), \\ U_0^* &\sim 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\mu^*} \right) \frac{1}{\zeta_0} + O(\zeta_0^{-2}) \right], \\ a^* &\sim -\frac{8}{\zeta_0^2} \left[1 - \left(1 + \frac{3}{\mu^*} \right) \frac{1}{\zeta_0} + O(\zeta_0^{-2}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

であって

$$\Psi^* \sim \zeta_0 \left(r^* + \frac{1}{r^*} \right) \sin \varphi, \quad (\zeta \geq \zeta_0) \quad (18)$$

$$\psi^* \sim \zeta_0 (3r^* - r^{*3}) \sin \varphi, \quad (0 \leq \zeta \leq \zeta_0) \quad (19)$$

と表わされる (但し $r^* = r/R_0$).

空洞中心における速度 U_0 の μ^* , ζ_0 依存性を示したものが図6である。一般に μ^* は空隙率に依存するが、^{7~11)} $\zeta_0 \geq 10^2$ であれば $U_0 \approx 3U_\infty$ と考えてよいようである。

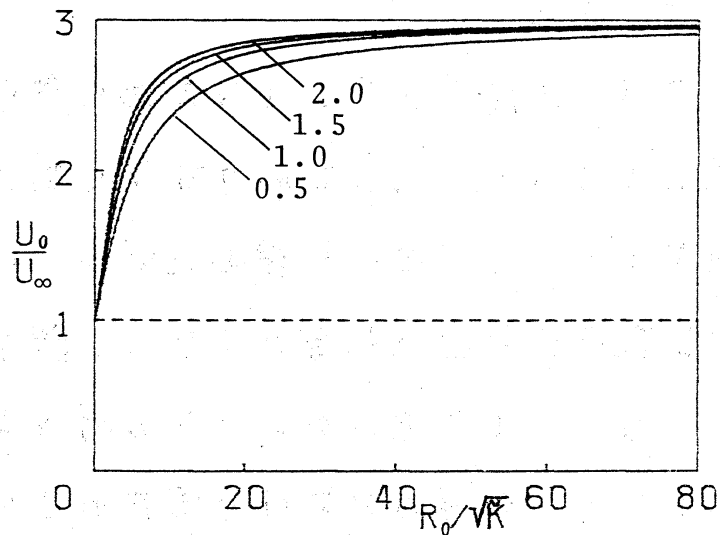


図6 空洞中心における速度 U_0^* .

図中の添字は μ^* の値を示す。

§4. 考察

我々のモデル (いま仮に GDS と呼ぶ) で得られた結果は §1 で述べた多孔性媒質中の多孔性円柱のモデル (これを仮に DD と呼ぶ) といくつかの点で異なっている。まず DD では円柱内の流れが一様であるが, GDS では図3, 4 に示され

ているような速度分布を持つ。つぎに DD では境界上で接線方向の速度が不連続であるが、 GDS では連続である。もっとも、これは $O(\epsilon)$ での結果であって、 $\epsilon \gg 1$ のとき $O(\epsilon^{-1})$ では速度や圧力にずれを生じる。また、空洞中心における速度は DD では $2U_0$ であるが、 GDS では $3U_0$ である ($\epsilon \gg 1$ の場合)。しかし空洞内に流れ込む流量は、空洞がなかった場合に比べて2倍になっており、これは DD でも GDS でも同じである。

これらの結果を検証するために室内実験を行なっているが、現在までのところ決定的な証拠は捕えられていない。例えば色素によって流線の可視化を試みているが、流速が遅いために拡散の相対的な影響が大きく、鮮明な流線の写真が得られていない。また色素の広がりの様子を見る限り流れの方向に対して前後左右の対称性も保たれていない場合が多く見られ、境界における凹凸のわずかな不整が空洞内の流れに微妙に影響しているように思われる。

我々のモデルでは第一近似として空洞と多孔性媒質との2つのぬり分けを行ない、仮想的な境界面 $r=R_0$ 上で速度および応力が連続であるという条件を課したが、微視的に見れば境界は決して滑らかではないし、また媒質部分が受け持つ応力を無視しているなど、いくつかの点で問題が残されている。

これらをも含めた境界条件の再検討, および実験的な側面からレーザー流速計などによる空洞内の流速の直接測定, など今後解決すべき課題が山積しているように思われる。

引用文献

- 1) 福岡正己 他: 「地下水ハンドブック」(建設産業調査会, 東京, 1979).
- 2) 本間仁, 安芸皎一編: 「物部水理学」(岩波, 東京, 1962).
- 3) 渋谷修, 日野努, 平山光信: 第16回土質工学研究発表会講演集(1981) 105-108.
- 4) A.E.Scheidegger: *The Physics of Flow through Porous Media* (Univ.Toronto Press, 1960) 2nd ed., Chap.4.
- 5) M.E.Harr: *Groundwater and Seepage* (McGraw-Hill, 1962) Chap.1.
- 6) 南勲: 農業土木研究別冊 No.1 (1960) 39-43.
- 7) H.C.Brinkman: *Appl.Sci.Res.* A1(1947) 27-34.
- 8) C.K.W.Tam: *J.Fluid Mech.* 38(1969) 537-546.
- 9) T.S.Lundgren: *J.Fluid Mech.* 51(1972) 273-299.
- 10) S.Childress: *J.Chem.Phys.* 56(1972) 2527-2539.
- 11) I.D.Howells: *J.Fluid Mech.* 64(1974) 449-475.
- 12) K.Yamamoto: *J.Phys.Soc.Jpn.* 31(1971) 1572-1575.
- 13) K.Yamamoto: *J.Phys.Soc.Jpn.* 34(1973) 814-820.
- 14) 佐野 理: *ながれ* 2 (1983) 257-264.